Тема 9.
Рациональные неравенства

РАЦИОНАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

I.Основные определения. Теоремы о равносильности.

1)Основные определения

2)Теоремы о равносильности

II.Виды рациональных неравенств и методы их решения

1)Линейные

2)Квадратные

3)Степени 3 и выше (метод интервалов)

4)Дробные рациональные (метод интервалов)

III.Применение метода интервалов для нерациональных неравенств

Основные определения

Решение неравенства – значение переменной, обращающее его в верное неравенство

Решить неравенство - найти множество всех его решений или доказать что их нет

Два неравенства называются равносильными если множества их решений совпадают

Равносильность неравенств сохраняется, если:

-к обеим неравенствам прибавить выражение φ(x), определенное всюду в ОДЗ неравенства

-перенести слагаемое из одной части в другую

-обе части неравенства умножить или разделить на φ(x), определенное всюду в ОДЗ исходного неравенства, положительное в ОДЗ исходного неравенства и оставить знак неравенства без изменений

-обе части неравенства умножить или разделить на положительное число и оставить знак неравенства без изменений.

де … у в ОДЗ … ОД … ить знак

де … изменить знак

тель нельзя

льными частями

$\dfrac{\log_2(2x+4)}{\log_4(x-3)}>0$ ОДЗ: $\begin{cases}2x+4>0 \\ x-3>0\end{cases}$ $x>3,\ x\neq 4$

$\log_2(2x+4)>0$ в ОДЗ, тогда $\log 4(x-3)>0$

$y=\log_4 t\uparrow$ на R+ $\begin{cases}x-3>0 \\ x-3>1\end{cases}$ $x\epsilon(4;+\infty)$

Ответ:$(4;+\infty)$

$\dfrac{x+3}{\log_{1/2}x}>0$ ОДЗ: $\begin{cases}x>0 \\ x\neq 1\end{cases}$

$x+3>0$ в ОДЗ, тогда $\log_{1/2}x>0$

$y=\log_{1/2}t\downarrow$ на R+ $\begin{cases}x<1 \\ x>0\end{cases}$ $x\epsilon(0;1)$

Ответ: $(0;1)$

$\dfrac{\log_{3/4}(3x-7)}{\log_{0,2}6}\leq 0$ т.к. $\log_{0,2}<0$, то $\log_{3/4}(3x-7)\geq 0$

$y=\log_{3/4}t\downarrow$ на R+ $\begin{cases}3x-7>0 \\ 3x-7\leq 1\end{cases}$ $x\epsilon(7/3;8/3]$

Ответ: $(7/3;8/3]$

$|x^2-3x+2|<|x^2-2x-2|$

Обе части неотрицательны на R; возведение в квадрат не нарушает равносильности

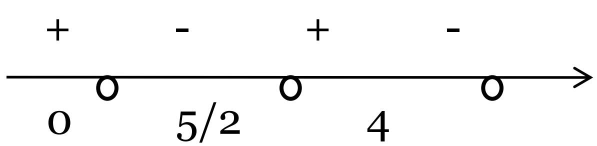
$(x^2-3x+2)^2<(x^2-2x-2)^2$

$(x^2-3x+2+x^2-2x-2)(x^2-3x+2-x^2+2x+2)<0$

$(2x^2-5x)(-x+4)<0$

$x(2x-5)(4-x)<0$

$x\in(0;5/2)\cup(4;+\infty)$



Ответ: $(0;5/2)\cup(4;+\infty)$

II.Виды рациональных неравенств и методы их решения

1)Линейные

а)$3x-6>0$

$x>2$

Ответ:$(2;+\infty)$

б)$-5x-1\geq 0$

$-5x\geq 1$

$x\leq -1/5$

Ответ:$(-\infty;-1/5]$

в)$0x<2$

$0<2$ – верно

Ответ: R

г)$0x>8$

$x>8$ – не верно

Ответ:$\varnothing$

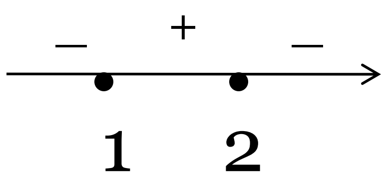
II.Виды рациональных неравенств и методы их решения

2)Квадратные

а)$-x^2+3x-2\leq 0$

$x^2-3x+2=0$

$x_1=2 \quad x_2=1$



$x\in(-\infty;1]\cup[2;+\infty)$

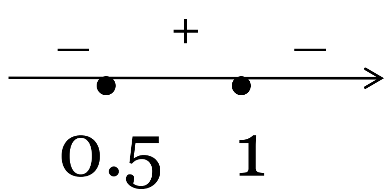
Ответ: $(-\infty;1]\cup[2;+\infty)$

б)$-2x^2+3x-1>0$

$2x^2-3x+1=0$

$D=(-3)2-4\cdot 2=1$

$x_1=1 \quad x_2=0.5$



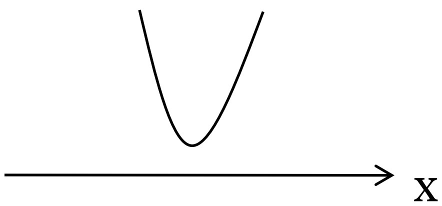
$x\in(0.5;1)$

Ответ:$(0.5;1)$

II.Виды рациональных неравенств и методы их решения

2)Квадратные

в)$2x^2-2x+3\geq 0$



$x\in(-\infty;+\infty)$

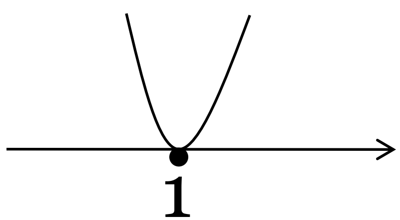
Ответ: $(-\infty;+\infty)$

$2x^2-2x+3x=0$

$D=(-2)^2-4\cdot 2\cdot 3=4-24=-20$

$D<0$

г)$x^2-2x+1\leq 0$



$x=1$

Ответ:$\{1\}$

$x^2-2x+1=0$

$x=1$

Рациональные степени 3 и выше (метод интервалов)

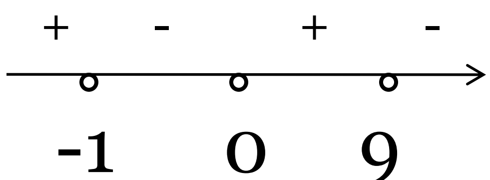
Правила постановки знака:

1)На крайнем правом промежутке знак совпадает со знаком старшего коэффициента.

2)При переходе через корень четной кратности знак сохраняется, нечетной - меняется.

Рациональные степени 3 и выше (метод интервалов)

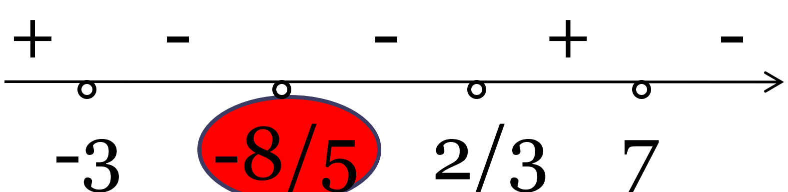
а) $x(9-x)(x+1)<0$



$x \in (-1;0) \cup (9;+\infty)$

Ответ: $(-1;0) \cup (9;+\infty)$

б) $(x+3)(3x-2)^5(7-x)^3(5x+8)^2<0$



$x \in (-3;-8/5) \cup (-8/5;2/3) \cup (7;+\infty)$

Ответ: $(-3;-8/5) \cup (-8/5;2/3) \cup (7;+\infty)$

Дробные рациональные

Алгоритм:

1)Ввести функцию
2)Область определения
3)Нули функции
4)Отметить нули <u>на области определения</u>
5)Поставить знак <u>на интервалах</u>
6)Выбрать <u>промежутки</u> в соответствии со знаком неравенства

Дробные рациональные

$$\frac{x^2-9}{x^2+5x+6} \geq 0$$

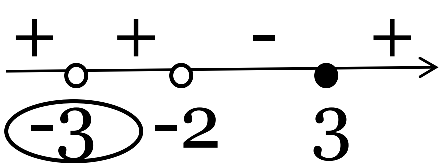
$$y = \frac{x^2-9}{x^2+5x+6}$$

$$\frac{(x-3)(x+3)}{(x+3)(x+2)} \geq 0$$

D(y): $x \neq -3$; $x \neq 2$

Нули функции: 3

-3 – не принадлежит D(y)



$x \in (-\infty;-3) \cup (-3;-2) \cup [3;+\infty)$

Ответ: $(-\infty;-3) \cup (-3;-2) \cup [3;+\infty)$

Дробные рациональные

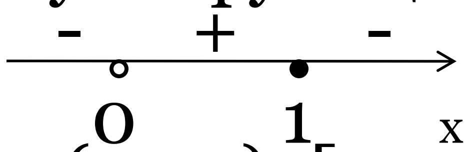
$$\frac{1}{x} \leq 1$$

$$\frac{1}{x} - 1 \leq 0$$

$$y = \frac{1-x}{x}$$

$D(y): x \neq 0$

Нули функции: 1



$x \in (-\infty; 0) \cup [1; +\infty)$

Ответ: $(-\infty; 0) \cup [1; +\infty)$

III.Применение метода интервалов для нерациональных неравенств

$(x-1)\sqrt{6+x-x^2} \geq 0$

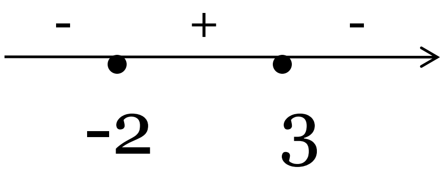
$y=(x-1)\sqrt{6+x-x^2}$

D(y): $6+x-x^2 \geq 0$

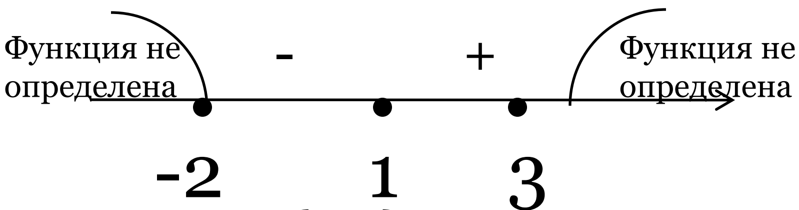
$[-2;3]$

$x^2-x-6=0$

$x_1=3 \quad x_2=-2$



Нули функции: -2; 3; 1



$x \in [1;3] \cup \{-2\}$

Ответ: $[1;3] \cup \{-2\}$