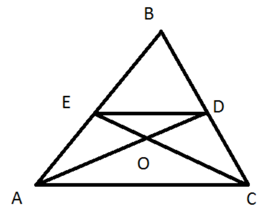
Городская математическая регата (для учащихся 9 классов)

Первый тур (10 минут)

1.1. На контрольной работе по арифметическим вычислениям одним из заданий было возведение в квадрат числа n. Коля, возведя число n в квадрат, получил 1234567895. Докажите что Коля ошибся.
Доказательство.
Раз это число оканчивается на цифру 5, то оно делится на 5. А раз оно делится на пять, то оно делится и на 25(т.к. 5-простое). Но чтобы число делилось на 25, оно не должно оканчиваться на 95, т.е. число не кратно 25, т.е. оно не является полным квадратом.

1.2. Дан треугольник ABC, в котором проведена средняя линия DE. Отрезки AD и CE пересекаются в точке O. Площадь треугольника BDE равна а, площадь треугольника DOE равна b. Найдите сумму площадей треугольников AOE и COD. (Баженов Василий) $_\Delta ADB$ $S_{AED} = S_{DEB}$
Ответ. $2(a-b)$.



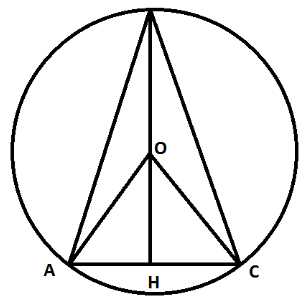
Решение.
Рассмотрим треугольник ADB. DE – медиана этого треугольника, значит площади треугольников AED и DEB равны (медиана делит треугольник на два равновеликих).
Тогда $S_{AEO} = S_{ADE} - S_{DOE} = S_{BDE} - b = a - b$. Аналогично получаем, что $S_{ODC} = a - b$.
Тогда искомая сумма равна $2(a-b)$.
$S_{AEO} = S_{ADE} - S_{DOE} = S_{BDE} - S_{DOE} = a - b$

1.3.В компании из 19 мальчиков каждый имеет среди остальных не менее 9 человек такого же возраста. Докажите, что все 19 человек одного возраста. 20 > 19
Доказательство.
Возьмём любых двух мальчиков из этой компании. Предположим, что они не одного возраста. Тогда для каждого из них среди оставшихся мальчиков найдутся 9 человек того же возраста. Тогда всего мальчиков 20. Противоречие. Следовательно, все 19 человек одного возраста.

Второй тур (12 минут)

2.1.На доске выписано шесть натуральных чисел. Докажите, что среди них можно найти два числа, разность которых делится на 5.
*Доказательство***.**
Т.к. существует ровно 5 возможных остатков при делении на 5, то по принципу Дирихле среди 6 чисел всегда найдутся хотя бы 2 числа с одинаковым остатком, т.е. их разность будет кратна 5.

2.2. Равнобедренный треугольник с углами $30^0, 75^0, 75^0$ вписан в окружность с радиусом 10 см. Найдите площадь треугольника. (Ефремов Дмитрий)
Ответ. $50 + 25\sqrt{3}$.



Решение.
Пусть дан равнобедренный треугольник ABC с основанием AC. Центр описанной окружности O лежит на высоте треугольника BH. $\angle AOC = 2\angle ABC = 60^0$ (центральный угол равен удвоенному вписанному). $AO = OC = 10$ (радиусы окружности). Тогда треугольник AOC – равнобедренный с углом при вершине 60 градусов, т.е. треугольник AOC – равносторонний. Из прямоугольного треугольника AOH получим, что AH=5 см (катет, лежащий напротив угла 30 градусов), тогда $OH = \sqrt{AO^2 - AH^2} = \sqrt{10^2 - 5^2} = 5\sqrt{3}$ см. Найдем площадь треугольника ABC:
$S = \frac{1}{2}BH \cdot AC = \frac{1}{2}(BO + OH) \cdot AC = \frac{1}{2}\left(10 + 5\sqrt{3}\right) \cdot 10 = 50 + 25\sqrt{3}$.

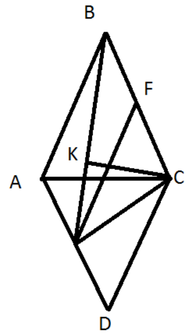
2.3.На столе лежит большая вкусная пицца с 2013 оливками. Ученик Вася съедает одну оливку и делит пиццу на два куска (не обязательно равных). Затем Вася из какого-нибудь кусочка, содержащего более одной оливки, снова съедает одну оливку и делит этот кусочек на два (не обязательно равных). И так далее. Можно ли через некоторое время оставить на столе только кусочки, содержащие ровно по 3 оливки?
Ответ. Нет.
Решение

После каждой процедуры (съедания оливки и деления кусочка пиццы на два) число оливок на 1 уменьшится, а число кусочков на 1 увеличится. Поскольку первоначально оливок было 2013, а кусочков — один, то после n процедур оливок окажется $(2013 - n)$, а кусочков станет $(n + 1)$. В задаче требуется, чтобы выполнилось равенство $2013 - n = 3(n + 1)$ или $2010 = 4n$, что невозможно, поскольку правая часть уравнения кратна 4, а левая — нет.

Третий тур (15 минут)

3.1.Набор из выписанных подряд 2014 цифр назовем левым, если каждая из первых 1007 цифр набора больше каждой из последних 1007 цифр набора и правым, если меньше. Каких наборов больше – левых или правых?
Ответ. Одинаково.
*Решение***.**
Пусть у нас есть некоторый правый набор. Поменяв местами группу из первых 1007 цифр на группу из последних 1007 цифр, получим левый набор. Т.о. каждому правому набору соответствует левый и наоборот, поэтому левых и правых наборов поровну.

3.2. Дан ромб *ABCD.* Точка *E* – середина стороны *AD, BE* = *a*. На отрезке *BE* выбрана точка *K* такая, что отрезок *CK* перпендикулярен *BE*. Длина отрезка *CK* = *b*. Найдите площадь ромба *ABCD*. (Баженов Василий)
Ответ. ab.
Решение.
Проведем отрезок EF, где F - середина BC. Треугольники ABE и FEB равны: сторона BE – общая, AE=BF как половины сторон ромба, $\angle AEB = \angle FBE$ как накрест лежащие углы при параллельных прямыхAE и BF и секущей BE. Аналогично равны треугольники FCE и DEC. Площадь ромба ABCD равна



$$S = S_{ABE} + S_{BEF} + S_{FEC} + S_{CED} = 2S_{BEF} + 2S_{FEC} = 2(S_{BEF} + S_{FEC}) = 2S_{BEC} = 2 \cdot \frac{1}{2} BE \cdot CK = ab.$$

3.3. В мешке у госпожи Беладонны несколько монет. Поросёнок Фунтик вытаскивает из мешка монеты. Если Фунтик наугад вытащит из мешка 1007 монет, среди них обязательно найдётся монета «1 рубль». Если Фунтик наугад вытащит 1008 монет, то среди них обязательно найдётся монета «2 рубля». Фунтик вытащил из мешка 2013 монет. Назовите эти монеты.
Ответ. Монет "1 рубль" 1007, монет "2 рубля" 1006.
Решение.
Раз среди любых 1007 монет обязательно найдётся монета "1 рубль", значит монет другого достоинства не больше 1006. То есть все монеты госпожи Беладонны, кроме возможно 1006,– это монеты "1 рубль". Раз среди любых 1008 монет обязательно найдётся монета "2 рубля", значит монет, отличных от "2 рублей", не больше 1007. То есть все монеты Беладонны, кроме возможно 1007,– это монеты "2 рубля". Следовательно, среди вытащенных 2013 монет обязательно есть 1007 монет "1 рубль" (других монет может быть не больше 1006) и 1006 монет "2 рубля" (других монет может быть не больше 1007). Но 1006+1007=2013, то есть на самом деле все монеты названы: 1007 рублёвых и 1006 двухрублёвых.